

Prova Scritta di Fisica I – 18 Gennaio 2010

Problema n. 1

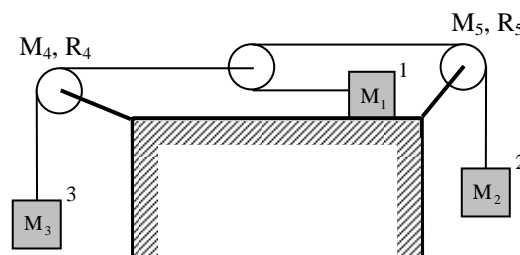
Si consideri il sistema riportato in figura costituito da tre masse M_1 , M_2 , M_3 collegate da funi ideali che passano senza strisciare attraverso tre carrucole, di cui quella centrale è priva di massa, mentre le altre hanno caratteristiche M_4, R_4 e M_5, R_5 (vedi figura). Delle tre carrucole, le due con massa sono fisse e l'altra è mobile, con il suo asse di simmetria che può spostarsi orizzontalmente.

Caso 1)

La massa M_1 è fissata sul piano. In questo modo l'intero sistema fisico diventa a un sol grado di libertà.

In queste condizioni,

- calcolare le accelerazioni lineari delle tre masse.
- se parte da ferma, quale distanza ha percorso M_2 (la massa 2) dopo 2 s ?



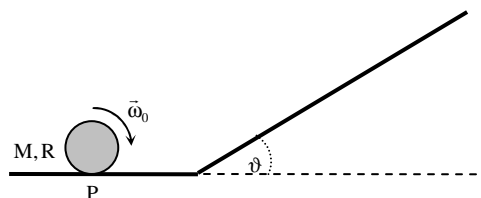
Opzionale Caso 2)

Sempre con M_1 bloccata, M_3 (la massa 3) viene collegata al pavimento, tramite una molla di Hooke di rigidità k . Calcolare, in queste condizioni, la frequenza delle oscillazioni del sistema.

Problema n. 2

Un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una superficie orizzontale con velocità angolare costante ω_0 . Successivamente, il disco incomincia a salire, muovendosi ancora di moto di puro rotolamento, su di un piano inclinato di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale. Si calcoli:

- il modulo V_{CM} della velocità del centro di massa del disco, quando questo si muove sulla superficie orizzontale.
- il momento di inerzia rispetto l'asse passante per il punto di contatto istantaneo con la superficie orizzontale (punto P)
- il modulo del momento angolare del disco, calcolato rispetto al punto di contatto istantaneo con la superficie orizzontale.
- l'energia cinetica del disco nel tratto pianeggiante, calcolata rispetto al suolo.
- la massima variazione di quota H subita dal centro di massa del disco sul piano inclinato
- il modulo ω della velocità angolare del disco quando questo è salito di $H/2$.



SOLUZIONI

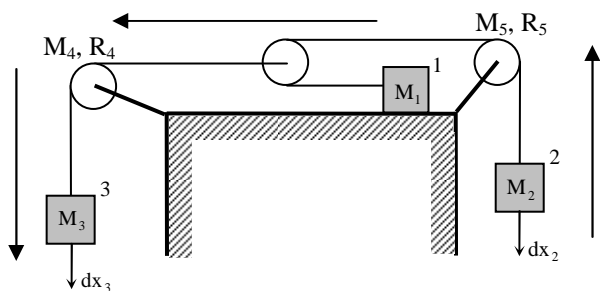
Problema n.1

Risolviamo con il metodo di d'Alembert.

La relazione tra gli spostamenti infinitesimi dx_2 e dx_3 e le relative accelerazioni è:

$$dx_2 = 2dx_3 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2a_3$$

Possiamo quindi impostare l'equazione, considerando che le uniche forze che fanno lavoro sono le forze peso di M_2 e M_3 , e scegliendo come positivo l'asse in figura



$$-M_2 g dx_2 + M_3 g dx_3 = M_2 a_2 dx_2 + M_3 a_3 dx_3 + I_{CM,4} \alpha_4 d\beta_4 + I_{CM,5} \alpha_5 d\beta_5$$

Risolvendo in termini di dx_3 otteniamo:

$$-2M_2 g + M_3 g = 4M_2 a_3 + M_3 a_3 + I_{CM,4} \frac{a_3}{R_4^2} + 4I_{CM,5} \frac{a_3}{R_5^2}$$

Da cui si ricava a_3 :

$$a_3 = \frac{-2M_2 g + M_3 g}{4M_2 + M_3 + \frac{I_{CM,4}}{R_4^2} + \frac{4I_{CM,5}}{R_5^2}}$$

Applicando le leggi della cinematica alla massa 2, otteniamo:

$$x_2(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2, \text{ con } x_0 \text{ e } v_0 = 0 \rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Quindi dopo 2 sec, si ha: $x_2(t=2s)$

Quando è presente la molla che collega M_3 al pavimento, definendo:

$$M_{eq,tot} = 4M_2 + M_3 + \frac{I_{CM,4}}{R_4^2} + \frac{4I_{CM,5}}{R_5^2}$$

l'espressione dell'accelerazione diventa:

$$a_3 = -\left(\frac{k}{M_{eq,tot}}\right) x_3 + \frac{-2M_2 g + M_3 g}{M_{eq,tot}}$$

Da cui si può ricavare la pulsazione e la frequenza delle oscillazioni:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{k}{4M_2 + M_3 + \frac{I_{CM,4}}{R_4^2} + \frac{4I_{CM,5}}{R_5^2}}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M_{eq}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4M_2 + M_3 + \frac{I_{CM,4}}{R_4^2} + \frac{4I_{CM,5}}{R_5^2}}}$$

Problema n.2

La soluzione può essere trovata nel testo **J. Quartieri et al - Fisica I** e viene qui riportata a beneficio dello studente.

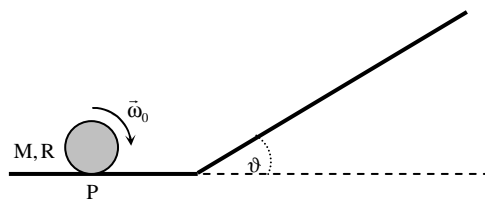
“Il modulo V_{cm} della velocità del centro di massa del disco sul piano orizzontale vale:

$$1) \quad V_{cm} = \omega_0 R$$

- 2) Il momento d'inerzia I_P calcolato rispetto all'asse di istantanea rotazione vale:

$$I_P = I_0 + MR^2 \quad \rightarrow \quad I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$3) \quad L_P = I_P \omega_0 \quad \rightarrow \quad L_P = \frac{3}{2}MR^2 \omega_0$$



L'energia cinetica del disco, calcolata rispetto al suolo, è:

$$4) \quad T_0 = \frac{1}{2}I_P \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{3}{4}MR^2 \omega_0^2$$

La massima variazione di quota H , subita dal centro di massa del disco sul piano inclinato, si può ottenere attraverso la conservazione dell'energia meccanica, tenuto conto che nel punto più alto il disco si ferma, quindi la sua energia cinetica è nulla. Valutando le energie potenziali della forza peso rispetto al piano orizzontale, l'energia meccanica in A vale:

$$E_A = T_A + U_A = T_0 + U_A = \frac{3}{4}MR^2 \omega_0^2$$

mentre quella nella posizione B è:

$$E_B = T_B + U_B = MgH$$

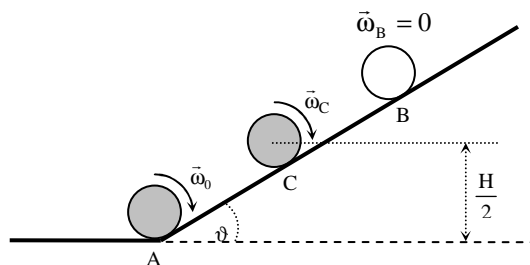
Quindi:

$$5) \quad E_B = E_A \quad \rightarrow \quad MgH = \frac{3}{4}MR^2 \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad H = \frac{3}{4} \frac{R^2 \omega_0^2}{g}$$

La velocità angolare del disco alla quota $H/2$ dal piano orizzontale, può ottenersi ancora con la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_A = \frac{3}{4}MR^2 \omega_0^2$$

$$E_C = T_C + U_C = \frac{3}{4}MR^2 \omega_C^2 + Mg \frac{H}{2}$$



$$6) \quad E_C = E_A \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}MR^2 \omega_C^2 + Mg \frac{H}{2} = \frac{3}{4}MR^2 \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{3} \frac{gH}{R^2}}$$

che, ricordando l'espressione precedentemente di H , assume la forma più semplice: $\omega_C = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.”